Université de Paris
PhStat1

Année 2019-2020

PHYSIQUE STATISTIQUE

TD n°1 : probabilités et méthodes statistiques

Les exercices estampillés [S] sont des exercices supplémentaires qui ne pourront être traités en séances de travaux dirigés dans l'horaire imparti, mais qu'il est utile d'étudier dans un travail personnel.

---

1 Moyenne, écart type, variables aléatoires

1. On lance un dé. Calculer la valeur moyenne du nombre affiché et l'écart quadratique moyen de cette quantité.
2. On lance deux dés. Calculer la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de la somme des deux nombres affichés. Quelle est la probabilité pour que cette somme soit égale à 8 ?

---

2 Loi binômiale

On réalise N tirages statistiquement indépendants donnant a chaque fois le résultat A avec une probabilité p et le résultat $\bar{A}$ avec une probabilité $q = 1 - p$ (par exemple : jeu de “pile ou face”, mesure du sens de la projection d'un spin “up/down”, marche aléatoire à une dimension, etc ...). Quelle est la probabilité pour que l'on trouve n fois A ? Calculer la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen du nombre de A obtenus pour N lancers. Donner leurs valeurs pour $p = q = \frac{1}{2}$.

---

3 Même toi mon fils !

1. On entend dire qu'à chacune de nos respirations, nous aspirons une molécule du dernier souffle de Jules César, lorsqu'il a prononça sa phrase célèbre. Vrai ? Faux ?
2. On considère un récipient de volume V contenant N particules statistiquement indépendantes et uniformément réparties en moyenne. Quel est le nombre moyen de particules contenues dans un petit domaine de volume v ainsi que ses fluctuations ?

---

4 Variables aléatoires Poissoniennes [S]

1. Soit deux variables aléatoires poissoniennes indépendantes n_1 et n_2. Montrer que leur somme $n = n_1 + n_2$ est aussi poissonienne. Exprimer le paramètre de la loi de n en termes de ceux des lois de n_1 et de n_2.
2. M particules discernables sont distribuées aléatoirement et uniformément sur N sites. Soit n_i leur nombre sur le site i. Montrer qu'à la limite $N, M \to \infty$ avec $M/N = \rho$ fixe, les n_i sont des variables poissoniennes indépendantes.
3. M points sont distribués aléatoirement sur l'intervalle $[0, L]$. On considère la limite $M, L \to \infty$ avec $M/L = \rho$ fixe. Trouver la loi $P_\ell(m)$ pour le nombre m de points dans un sous-intervalle de longueur ℓ.

---

5 Bruit de grenaille [S]

Des électrons de charge e sont émis au hasard par le filament chauffé d'un tube à vide. On cherche à déterminer la statistique des électrons émis, et en particulier l'expression du bruit relié au caractère discret du transport de la charge. Ce bruit est appelé « bruit de grenaille » ou *shot noise*.

On découpe le temps t en N intervalles Δt. La probabilité (élémentaire) d'émettre un électron dans un intervalle Δt est égale à $p = \alpha \Delta t$, avec α une constante. L'intervalle Δt est supposé suffisamment petit pour que la probabilité d'émettre deux électrons soit négligeable. On admet de plus que l'émission d'un électron n'affecte pas la probabilité d'émission d'un autre.

1. Quelle est la probabilité q pour qu'aucun électron ne soit émis pendant le temps Δt ? En déduire l'expression de $P(n,t)$, la probabilité d'émettre n électrons dans un intervalle de temps t.
2. Calculer la valeur moyenne de la variable aléatoire n, $\langle n \rangle$ ainsi que ses fluctuations représentées par la variance Δn^2. Simplifier cette expression dans la limite $p \ll 1$ avec pN maintenu constant.
3. Montrer que dans la limite considérée ici où l'intervalle Δt tend vers 0 : $p \to 0$, $N \to \infty$, $P(n,t)$ peut s'écrire : $P(n,t) \approx \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np}$. Comment s'appelle la statistique obtenue ?
4. L'intensité du courant électrique émis pendant le temps t est donnée par $I = en/t$. Calculer la valeur moyenne du courant ainsi que le rapport $\frac{\Delta I^2}{\langle I \rangle}$, où ΔI^2 est la variance de la variable I.
5. Ces fluctuations sont connues sous le nom d'effet de grenaille. D'après ce qui précède, donner les conditions pour lesquelles elles sont les plus importantes. Calculer ΔI pour un courant moyen de $\langle I \rangle = 1\,\mu\text{A}$ et un temps de mesure $t = 1\,\text{ms}$.

---

6 Marche au hasard

Un marcheur ivrogne se déplace sur une droite en sautant aléatoirement à gauche ou à droite (de manière équiprobable) à une distance a de là où il se trouve. À l'instant $t = 0$ il se trouve à l'origine des coordonnées et la durée qui s'écoule entre chacun de ses sauts est τ.

1. Quelle est la probabilité $P(n;N)$ que le marcheur ait, en N sauts, effectué n sauts vers la droite et $N - n$ vers la gauche ? Quelle sera alors sa position x en fonction de N, n et a ? Quel est le temps t qu'il lui faut pour faire N sauts ?
2. Quel est le nombre moyen de pas vers la droite ?
3. Exprimer la dispersion de la variable x, définie par
$$(\Delta x)^2 = \text{var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \tag{1}$$
en fonction de N et a, puis en fonction de t, τ et a.
4. On va à présent s'intéresser au comportement de $P(n;N)$ lorsque n et N sont très grands devant 1, avec $n/N = \xi$ quelconque mais fixé. En utilisant la formule de Stirling, montrer que $P(n;N)$ peut être approximée par une loi gaussienne en ξ.
5. On note $p(x_k, t_N)$ la probabilité que le marcheur soit à la position $x_k = ka$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) à l'instant $t_N = N\tau$. Écrire l'équation bilan qui relie $p(x_k, t_{N+1})$, $p(x_{k+1}, t_N)$, et $p(x_{k-1}, t_N)$.
6. Passage au continu : montrer que lorsque $|k| \gg 1$ et $N \gg 1$, cette équation devient $\partial_t p - D\partial_x^2 p = 0$ où l'on exprimera D en fonction de a et τ. Connaissez-vous des domaines de la physique où apparaît cette équation ? Comment s'appelle D ?

---

7 Loi uniforme, équiprobabilité

1. On laisse tomber au hasard une aiguille sur une table. Quelle est la probabilité qu'elle fasse un angle de θ_0 à $d\theta$ près avec une direction de référence (l'un des bords par exemple) ?
2. On trace sur la table des parallèles espacées de $2a$, l'aiguille ayant elle même une longueur de $2a$. Quelle est la probabilité pour qu'elle coupe l'une des parallèles ? En deduire une méthode permettant de mesurer π.

---

8 Oscillateurs harmoniques ayant des phases aléatoires [S]

Le déplacement d'un oscillateur harmonique simple classique en fonction du temps est donné par

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

où ω est la pulsation de l'oscillateur, A son amplitude et ϕ, la phase, est une constante qui peut prendre une valeur quelconque entre 0 et 2π. On considère un ensemble de tels oscillateurs présentant tous la même pulsation et la même amplitude, mais dont les phases sont aléatoires. La probabilité de trouver l'une des phases entre ϕ et $\phi + d\phi$ est $\mathrm{d}P(\phi) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi$.

1. Quelle est la probabilité $dP(x)$ que le déplacement x d'un oscillateur quelconque à un instant t donné soit compris entre x et $x + \mathrm{d}x$?
2. Montrer que la *moyenne temporelle* de $x^n(t)$ pour un oscillateur donné peut s'exprimer à l'aide d'une *moyenne sur la distribution des phases* ϕ. Quelle est l'idée du cours illustrée par ce petit calcul ?
3. On étudie maintenant un système de deux oscillateurs harmoniques classiques indépendants, de même pulsation ω, correspondant par exemple au déplacement d'un point matériel selon deux axes perpendiculaires :

$$x(t) = a\cos(\omega t + \phi) \qquad y(t) = b\cos(\omega t + \psi) \tag{3}$$

   L'énergie d'un tel système est ici proportionnelle à la somme $a^2 + b^2$.
   Calculer la *valeur moyenne dans le temps* de x, x^2, y, y^2, xy.
4. On considère ensuite un *ensemble statistique* de tels systèmes dans lequel l'énergie totale est fixée, c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 = A^2 \tag{4}$$

   est fixé. On pose $a = A\cos(\alpha)$ et $b = A\sin(\alpha)$, et on suppose que l'ensemble statistique est caractérisé par une densité de probabilité constante dans le domaine

$$0 \leqslant \phi < 2\pi \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

   Calculer la valeur moyenne d'ensemble des quantités étudiées à la question 3. Un système de deux oscillateurs harmoniques classiques indépendantes vérifie-t-il le principe ergodique ?