# TD n°4

# Corrigé

## Ex 4 : GP dans un champ de gravitation

1/ $Z = \dfrac{z^N}{N!}$ (N particules indépendantes et indiscernables)

avec $z = \displaystyle\iint \frac{d^3\vec{r}\, d^3\vec{p}}{h^3}\, e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{r},\vec{p})}$

$z$ ↑ $\quad \vec{g} = -g\vec{e_z}$

où $\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p}) = \dfrac{|\vec{p}|^2}{2m} + mgz$

$$z = \underbrace{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{h^3}\, e^{-\frac{\beta}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}}_{\displaystyle = \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} = \lambda^{-3}(\beta)} \times \underbrace{\iiint_{\text{volume}} e^{-\beta m g z}\, dx\, dy\, dz}_{\displaystyle = S \times \frac{1 - e^{-\beta m g L}}{\beta m g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \cdot \left(\frac{1 - e^{-\beta m g L}}{\beta m g L}\right)^N} \qquad (V = S \times L)$$

2/ Energie interne :

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} N k_B T - N k_B T \frac{1+\beta m g L - e^{\beta m g L}}{1 - e^{\beta m g L}}$$

Quand $L \to 0$, le $2^{ème}$ terme tend vers

et donc $U \to \frac{3}{2} N k_B T$

Logique, on retrouve l'énergie d'un GP en l'absence de champ.

3/ Proba qu'une particule se trouve à la posit° $\vec{r}$ (à $d^3\vec{r}$ près) avec l'impulsion $\vec{p}$ (à $d^3\vec{p}$ près) est :

$$d^6 P = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{r},\vec{p})} d^3\vec{r}\, d^3\vec{p}}{Z}$$

$\Rightarrow$ La proba qu'elle soit à la posit° $z$ (à $dz$ près) s'obtient en intégrant sur les variables $x, y, p_x, p_y, p_z$. On obtient :

$$dp(z) = \frac{e^{-\beta m g z}}{1 - e^{-\beta m g L}} dz \times \beta m g$$

$\left( \text{on peut vérifier que } \int_0^L dp(z) = 1 \right)$

Et donc, le # de particules entre $z$ et $z+dz$

est : $$\boxed{N(z)\,dz = N \times dp(z) = N\beta m g \,\frac{e^{-\beta m g z}}{1-e^{-\beta m g L}}\,dz}$$

Qd $L \longrightarrow +\infty$ $$N(z) = N\beta m g\, e^{-\beta m g z}$$
$$= N(0)\, e^{\beta m g z}$$

C'est la "formule du nivellement barométrique"

d'une atmosphère <u>isotherme</u> que l'on peut

obtenir à partir des lois de l'Hydrostatique :

$$\rho(z)\,\vec{g} = -\frac{dP}{dz}\,\vec{e}_z \iff \rho(z)\,g = \frac{dP}{dz} \qquad (1)$$

avec $\rho(z)$ : masse volumique $= m\,N(z)/S$

et pour 1 GP : $$P(z) = \frac{N(z)}{S}\,k_B T \qquad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \rightarrow g\,m\,N(z) = k_B T\,\frac{dN(z)}{dz}$$

solut° : $$N(z) = N(0)\,e^{-\beta m g z}$$ cqfd.

4/ On peut par exemple tracer les 4 points sur un graphe en échelle log-log et ajuster ces points par un fit linéaire.

D'après la formule du nivellement barométrique, la pente de cette droite est égale à $-\frac{mg}{k_B T}$, ce qui nous permet d'en déduire la valeur de $k_B$.