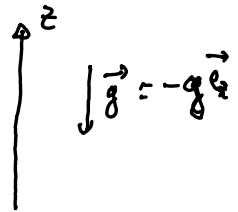


TD n°4

Corrigé

Ex 4: GP dans un champ de gravitation1/  $Z = \frac{Z^N}{N!}$  (N particules indépendantes et indiscernables)

avec  $Z = \iint \frac{d^3\vec{n}}{R^3} \frac{d^3\vec{p}}{h^3} e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{n}, \vec{p})}$



où  $\mathcal{H}(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + mgz$

$$Z = \underbrace{\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x dp_y dp_z}{R^3} e^{-\frac{\beta}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}}_{\text{Volume}} \times \underbrace{\iiint e^{-\beta mgz} dx dy dz}_{\text{Volume}}$$

$$\frac{1}{R^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$

$$= \lambda^{-3}(\beta)$$

$$S = \frac{1 - e^{-\beta mgL}}{\beta mg}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{\lambda^3} \right)^N \cdot \left( \frac{1 - e^{-\beta mgL}}{\beta mg} \right)^N \quad (V = S \cdot L)$$

2/ Energie interne:

$$U = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} N k_B T - N k_B T \frac{1 + \beta mgL - e^{\beta mgL}}{1 - e^{\beta mgL}}$$

Quand  $L \rightarrow 0$ , le 2<sup>ème</sup> terme tend vers

$$\text{et donc } U \rightarrow \frac{3}{2} N k_B T$$

logique, on retrouve l'énergie d'un GP en l'absence de champ.

3/ Proba qu'une particule se trouve à

la posit°  $\vec{n}$  (à  $d^3\vec{n}$  près) avec l'impulsion

$\vec{p}$  (à  $d^3\vec{p}$  près) est:

$$d^6p = \frac{e^{-\beta \vec{p} \cdot \vec{n} - \beta mgz}}{Z} d^3\vec{n} d^3\vec{p}$$

$\Rightarrow$  La proba, qu'elle soit à la posit°  $z$  (à  $dz$ ) près s'obtient en intégrant sur les variables  $x, y, p_x, p_y, p_z$ . On obtient:

$$dp(z) = \frac{e^{-\beta mgz}}{1 - e^{-\beta mgL}} dz \cdot \beta mg$$

(on peut vérifier que  $\int_0^L dp(z) = 1$ )

Et donc, le # de particule entre  $z$  et  $z+dz$

$$\text{est : } N(z) dz = N_0 dp(z) = N_0 \beta m g \frac{e^{-\beta m g z}}{1 - e^{-\beta m g L}} dz$$

$$\text{Qd } L \rightarrow +\infty \quad N(z) = N_0 \beta m g \frac{e^{-\beta m g z}}{e^{\beta m g z}} \\ = N_0 e^{-\beta m g z}$$

C'est la "formule du nivellement barométrique" d'une atmosphère isotherme que l'on peut obtenir à partir des lois de l'hydrostatique :

$$\rho(z) \vec{g} = - \frac{dP}{dz} \vec{z} \quad (\Leftrightarrow) \quad \rho(z) g = \frac{dP}{dz} \quad (1)$$

avec  $\rho(z)$  : masse volumique =  $m N(z) / S$

$$\text{et pour 1 GP : } P(z) = \frac{N(z)}{S} k_B T \quad (2)$$

$$(1) \text{ \& } (2) \rightarrow g m N(z) = k_B T \frac{dN(z)}{dz}$$

$$\text{solut. : } N(z) = N_0 e^{-\beta m g z} \quad \text{cqfd.}$$

4/ On peut par exemple tracer les 4 points sur un graphe en échelle log-log et ajuster ces points par un fit linéaire.

D'après la formule du nivellement barométrique, la pente de cette droite est égale à  $-\frac{mg}{k_b T}$ , ce qui nous permet d'en déduire la valeur de  $k_b$ .